Adı Soyadı:
Numarası:
İmza:

1	2	3	4	5	6	7	8	Toplam

06.07.2022

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

2021-2022 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 314 KOMPLEKS FONK. TEO. GİRİŞ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) a) $7+i\sqrt{15}$ sayısının karekökünü bulunuz.

b) $z^4 = 1+i$ denkleminin çözümlerini bulunuz.

2) $\mathbb{C}$'de iç nokta, sınır noktası, yığılma noktası tanımlarını yapınız ve $A=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}\cup\left\{z\in\mathbb{C}:|z-3|<\frac{1}{2}\right\}\cup\{2,2+i\}$ kümesi için $A^0, \partial A, A'$ kümelerini bulunuz.

3) $z=e^{\frac{1}{3}+i\sqrt{5}}$ üstel ifadesinin reel, sanal kısımlarını, modülünü, $\arg z$, $Argz$ değerlerini bulunuz.

4) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}+\dfrac{1}{\cos z-\frac{1}{2}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

5) $\left(\dfrac{in}{n^2+i}\right)$ ve $(z_n)=\left(\dfrac{1+i}{4}\right)^n$ olmak üzere (z_n) dizileri yakınsak mıdır? Varsa limitlerini bulunuz. (Yol Gösterme; $|z_n|\to 0$)

6) $f(z)=\sin\left(e^z\right)$ fonksiyonunun Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığını gösterip, türevlenebilir olduğunu açıklayınız. $f'(z)$'yi bulunuz.

7) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ fonksiyonu veriliyor. $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ var mıdır? f, $z_0=0$'da sürekli midir? Neden?

Not: Sorular eşit puanlıdır. Süre 100 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

(1) Komp. Fonk. Teo. Giriş Bütünleme sınavı

a) $7+i\sqrt{15}$ sayısının karekökünü bulunuz.

Çözüm:

$$z=\mp\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+\mu i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)\qquad b>0,\ \mu=1,\quad b=\sqrt{15}>0,\ a=7$$

$$=\mp\sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2+15^2}}{2}}+1\cdot i\sqrt{\frac{-7+\sqrt{7^2+15}}{2}}=\mp\left(\frac{\sqrt{15}}{2}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

b) $z^4=1+i$ denkleminin çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $a=1+i$, $|a|=\sqrt{2}$, $\arg a=\theta=\pi/4$

$$z_0=(\sqrt{2})^{1/4}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right),\quad z_1=(\sqrt{2})^{1/4}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$$

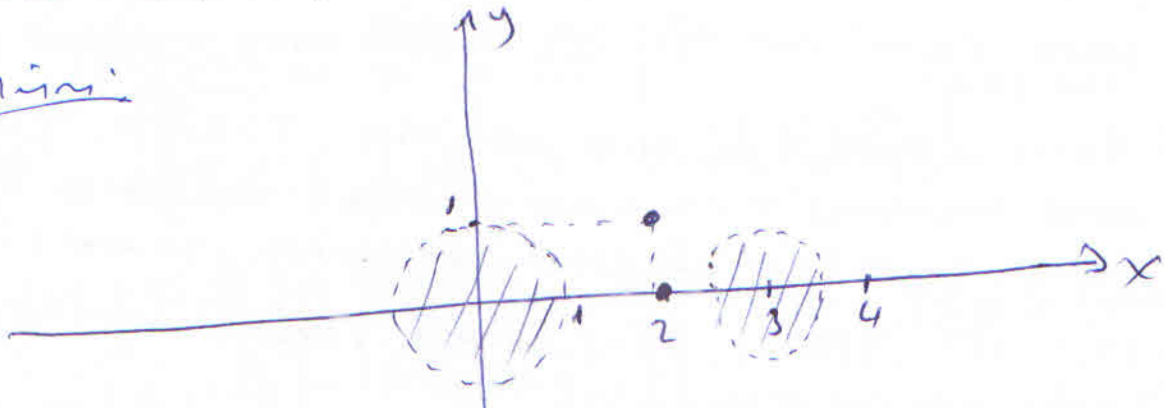
$$z_2=2^{1/8}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right)\quad z_3=2^{1/8}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$$

(2) $\mathbb{C}$ de iç nokta, sınır noktası, yığılma noktası tanımlarını yapınız ve

$$A=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}\cup\{z\in\mathbb{C}:|z-3|<\tfrac{1}{2}\}\cup\{2,2+i\}$$

kümesi için A°, ∂A, A', $\overline{A}$ kümelerini bulunuz.

Çözüm:



$A^\circ=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}\cup\{z\in\mathbb{C}:|z-3|<\frac{1}{2}\}$

$A'=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}\cup\{z\in\mathbb{C}:|z-3|\le\frac{1}{2}\}$

$\partial A=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}\cup\{z\in\mathbb{C}:|z-3|=\frac{1}{2}\}\cup\{2,2+i\}$

$\overline{A}=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}\cup\{z\in\mathbb{C}:|z-3|\le\frac{1}{2}\}\cup\{2,2+i\}$

③ $z = e^{\frac{1}{3}+i\sqrt{5}}$ üstel ifadesinin reel, sanal kısımlarını, modülünü, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$ değerlerini bulunuz.

Çözüm: $|z| = \left|e^{\frac{1}{3}+i\sqrt{5}}\right| = e^{\frac{1}{3}} \cdot \left|e^{i\sqrt{5}}\right| = e^{1/3}$ $\qquad |e^{i\theta}| = 1$

$$e^{\frac{1}{3}+i\sqrt{5}} = e^{\frac{1}{3}} \cdot e^{i\sqrt{5}} = e^{1/3} \cdot \cos\sqrt{5} + i e^{1/3} \sin\sqrt{5}$$

$\operatorname{Re} z = e^{1/3}\cos\sqrt{5}$, $\operatorname{Im} z = e^{1/3}\sin\sqrt{5}$,

$\arg z = \sqrt{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\quad \operatorname{Arg} z = \sqrt{5}$

④ $f(z) = \dfrac{1}{\sin z} + \dfrac{1}{\cos z - \frac{1}{2}}$

fonk.nun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $D_f = \{z \in \mathbb{C} : \sin z \neq 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \cos z \neq \frac{1}{2}\}$.

$\cos z = \frac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 1$

$t = e^{iz}$, $t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 = 3i^2$

$t_{1,2} = \dfrac{1 \mp \sqrt{3i^2}}{2} \Rightarrow e^{iz} = \dfrac{1 \mp i\sqrt{3}}{2}$

$\ln e^{iz} = \ln\left(\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow iz = \ln\left(\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$iz = \ln\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| + i\arg\left(1/2 \mp i\sqrt{3}/2\right)$

$iz = \ln\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| + i\arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $iz = \ln\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| + i\arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta_1 = \arg z_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta_2 = \arg z_2 = \arg(\bar{z}_1) = -\theta_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$,

$z = \frac{1}{i}\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right) = \frac{1}{i} \cdot i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$z_{1,2} = \mp\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $\qquad \sin z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$D_f = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ z = \mp\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

⑤ $\left(\frac{in}{n^2+i}\right)$ ve $\left(\underbrace{\left(\frac{1+i}{4}\right)^n}_{z_n}\right)$ dizileri yakınsak mıdır? varsa limitlerini bulunuz. ($|z_n| \to 0$ old. göster)

Çözüm:

$$\frac{in}{n^2+i} = \frac{in(n^2-i)}{n^4+1} = \frac{n}{n^4+1} + i\,\frac{n^3}{n^4+1} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

$$z = 1+i \Rightarrow \arg z = \theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt2},\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt2},\ \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow z^n = (1+i)^n = 2^{n/2}\left[\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right]$$

$$\left(\frac{1+i}{4}\right)^n = \frac{(1+i)^n}{4^n} = \frac{(\sqrt2)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)}{4^n}$$

$$= \underbrace{\frac{(\sqrt2)^n\cos\frac{n\pi}{4}}{4^n}}_{a_n} + i\,\underbrace{\frac{(\sqrt2)^n\sin\frac{n\pi}{4}}{4^n}}_{b_n}$$

$$a_n^2 + b_n^2 = \frac{(\sqrt2)^{2n}\cos^2\frac{n\pi}{4}}{4^{2n}} + \frac{(\sqrt2)^n\sin^2\frac{n\pi}{4}}{4^{2n}}$$

$$= \frac{(\sqrt2)^{2n}\left(\cos^2\frac{n\pi}{4} + i\sin^2\frac{n\pi}{4}\right)}{4^{2n}} = \frac{(\sqrt2)^{2n}}{4^{2n}}\cdot 1 = \left(\frac{\sqrt2}{4}\right)^{2n}$$

$$|z_n|^2 = a_n^2 + b_n^2 = \left(\frac{\sqrt2}{4}\right)^n \to 0 \ (n\to\infty) \quad \left(\frac{\sqrt2}{4} < 1 \text{ old.}\right)$$

$|z_n| \to 0$ $(n\to\infty)$ dır. $\Rightarrow$ $z_n \to 0$ $(n\to\infty)$ dır.

(6) $f(z)=\sin(e^z)$ fonksiyonunun Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığını gösterip, türevlenebilir olduğunu açıklayınız. $f'(z)$ yi bulunuz.

Çözüm:

$f(z)=\sin(e^z)=\sin(e^{x+iy})=\sin(e^x\cos y+ie^x\sin y)$

$$=\underbrace{\sin(e^x\cos y).\,ch(e^x\sin y)}_{u(x,y)}+i\,\underbrace{\cos(e^x\cos y).\,sh(e^x\sin y)}_{v(x,y)}$$

$u_x=e^x\cos y.\cos(e^x\cos y).\,ch(e^x\sin y)+\sin(e^x\cos y)\,sh(e^x\sin y)e^x\sin y$

$v_y=\sin(e^x\cos y)\,e^x\sin y.\,sh(e^x\sin y)+\cos(e^x\cos y)\,ch(e^x\sin y)e^x\cos y$

$\Rightarrow \boxed{u_x=v_y}$

$v_x=-\sin(e^x\cos y)e^x\cos y\ sh(e^x\sin y)+\cos(e^x\cos y)ch(e^x\sin y).e^x\sin y$

$u_y=-\cos(e^x\cos y).e^x\sin y.\,ch(e^x\sin y)+\sin(e^x\cos y)sh(e^x\sin y)e^x\cos y$

$v_x=-u_y \Rightarrow$ Cauchy-Riemann denk. sağla.

$f'(z)=e^z\cos(e^z)$ dır.

(7) $f(z)=\dfrac{Re\,z}{|z|}$ fonksiyonu ~~ALLA~~ veriliyor.

$\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ var mıdır? f, $z_0=0$ da sürekli midir?

Çözüm: x-eks., $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{Re\,z}{|z|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}=-1$

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{Re\,z}{|z|}$ limiti yoktur. Dolayısıyla $z_0=0$ da

sürekli değildir.